Correction SIGMA 3B.

Exercice 1

① $E = \left\{ \begin{pmatrix} 3y+z \\ 2y \\ -z \end{pmatrix}, \ y, z \in \mathbb{R} \right\}$

(a). $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in E$ (en prenant $y = z = 0$).

. Soit $X_1, X_2 \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $X_1 = \begin{pmatrix} 3y_1+z_1 \\ 2y_1 \\ -z_1 \end{pmatrix}$

$X_2 = \begin{pmatrix} 3y_2+z_2 \\ 2y_2 \\ -z_2 \end{pmatrix}$

$$\lambda X_1 + X_2 = \begin{pmatrix} \lambda 3y_1 + \lambda z_1 + 3y_2 + z_2 \\ 2\lambda y_1 + 2y_2 \\ -\lambda z_1 - z_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3(\lambda y_1 + y_2) + (\lambda z_1 + z_2) \\ 2(\lambda y_1 + y_2) \\ -(\lambda z_1 + z_2) \end{pmatrix} \in E \quad \left(\text{avec } \begin{array}{l} y = \lambda y_1 + y_2 \\ z = \lambda z_1 + z_2 \end{array} \right)$$

Donc <u>E est un sous espace vectoriel</u> de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(b) $E = \left\{ y\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ y, z \in \mathbb{R} \right\}$.

$$\boxed{E = \operatorname{vect}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}}.$$

(c) Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 = 0 \\ -\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

Donc $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est $\boxed{\text{une famille libre}}$.

On détermine maintenant Im f

On a $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$.

On cherche si cette famill est libre.

Soient, $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que

$$x\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

(Il s'agit du système précédent qui n'est pas de cramer)

Ainsi en choisissant $\begin{matrix}x=0\\y=1\\z=1\end{matrix}$, on a $\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} = 0$

$$\iff \begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$$

La famille est liée.

On a alors $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}\right\}$.

→ Vérifions que cette famille est libre

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix} = 0$

$$\iff \begin{cases} 2\lambda + \mu = 0 \\ \lambda - \mu = 0 \\ 2\lambda - 2\mu = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3\mu = 0 \\ \lambda = \mu \end{cases} \iff \lambda = \mu = 0$$

Donc $\boxed{\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}\right\}}$.

Exercice 2

1) (a)

- $x \mapsto -x\ln(x)$ est continue sur $]0;+\infty[$ en tant que produit de fonctions continues sur $]0;+\infty[$.

$x \mapsto 1+x^2$ est continue sur $]0;+\infty[$ et ne s'annule pas

Ainsi $x \mapsto f(x)$ est continue sur $]0;+\infty[$.

Etude en 0 :

$\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0$ par croissance comparées

$\lim\limits_{x \to 0^+} 1+x^2 = 1$

Donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$.

Ainsi, $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}^+}$

(b) $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $x \geq 0$, $1+x^2 \geq 0$

Donc le signe de f dépend du signe de $-\ln(x)$.

	0	1	$+\infty$
signe $f(x)$	+	0	−

2) f est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc on peut définir sa primitive s'annulant en 0 par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad F(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

3) (a) f est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $x \mapsto -x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

Par somme de fonctions dérivables, g est dérivable.

(4) (a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = F(u_n) - u_n$

$= g(u_n) \leq 0$ (d'après la question

Ainsi $u_{n+1} \leq u_n$.

et $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$

(b) On montre par récurrence $\mathcal{P}_n : \{ u_n \in [0;1] \}$

Initialisation : $u_0 = 1 \in [0;1]$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain rang

On a donc $u_n \in [0;1]$.

$u_{n+1} = F(u_n) = \int_0^{u_n} f(t)\,dt$ Or f est positive sur $[0;1]$

et donc $u_{n+1} \geq 0$

On a également $u_{n+1} \leq u_n \leq 1$.

Ainsi $u_{n+1} \in [0;1]$.

Conclusion : La propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0;1]}$

(c) La suite (u_n) est décroissante et minorée. Elle est donc convergente vers une limite finie ℓ.

On a alors $F(\ell) = \ell \iff g(\ell) = 0$.

D'après la question précédente, l'unique solution de $g(\ell) = 0$ est $\boxed{\ell = 0.}$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$$

② $\boxed{X(\Omega) = [\![0; n]\!]}$

③ (a) D'après la consigne $P_{Z=0}(X=0) = 1$

et $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $P_{Z=0}(X=i) = 0$

(b) Quand $Z = n$, On tire dans l'urne ~~Un~~ qui ne contient que des boules blanches

On tire alors n boules (qui seront forcément blanches)

Ainsi
$$\boxed{\begin{array}{l} P_{Z=n}(X=n) = 1 \\ \forall i \in [\![0; 1]\!] \quad P_{Z=n}(X=i) = 0 \end{array}}$$

(c) Si $k < i \leq n$ On est dans le cas où $Z = k$

Donc on tire k boules dans l'urne U_k.

Il ne peut pas y avoir plus de k boules blanches tirées

donc $\boxed{P_{Z=k}(X=i) = 0}$

Si $0 < i \leq k$ On répète k fois une épreuve de Bernoulli (Tirer une boule blanche) de probabilité de succès $\frac{k}{n}$ (On tire dans l'urne U_k) et les répétitions sont indépendante (remise de la boule)

$$P_{Z=k}(X=i) = \binom{k}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^{i} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{k-i}$$

⑤ $$\sum_{i=0}^{n} P(X=i) = P(X=0) + \sum_{i=1}^{n-1} P(X=i) + P(X=n).$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{2n}\right)^k + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=i}^{n-1}\binom{k}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{k-i} + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

On inverse les sommes pour $1 \leq i \leq n-1$, $i \leq k \leq n-1$

On a

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=i}^{n-1}\binom{k}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{k-i} = \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{k-i}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{k-i}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{k-i} - \left(1-\frac{k}{n}\right)^k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\left(\frac{k}{n}+\left(1-\frac{k}{n}\right)\right)^k - \left(1-\frac{k}{n}\right)^k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k - \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(1-\frac{k}{n}\right)^k$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1-(1/2)^{n-1}}{1-1/2}\right) - \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{2n}\right)^k$$

$$= 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{2n}\right)^k$$

Ainsi :

$$\sum_{i=0}^{n} P(X=i) = \cancel{\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{2n}\right)^k} + \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \cancel{\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{2n}\right)^k} + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} P(X=i) = 1}$$

4) En passant par la forme explicite, on ne voit pas comment faire mais on va chercher un télescopage

$$E(N) = \sum_{k=2}^{n+1} k\,P(N=k)$$

$$= \sum_{k=2}^{n} k\big(P(N>k-1) - P(N>k)\big) + (n+1)\,P(N=n+1)$$

$$= \sum_{k=2}^{n} k\,P(N>k-1) - \sum_{k=2}^{n} k\,P(N>k) + (n+1)\,P(N>n)$$

$$= \sum_{k'=1}^{n-1} (k'+1)\,P(N>k') - \sum_{k=2}^{n} k\,P(N>k)$$

$$= \cancel{\sum_{k'=2}^{n-1} k'\,P(N>k')} + \sum_{k'=1}^{n-1} P(N>k') + 1\,P(N>1) - \cancel{\sum_{k=2}^{n} k\,P(N>k)}$$

$$- \cancel{n\,P(N>n)} + (n+1)\,P(N>n)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} P(N>k) + P(N>1) + P(N>n)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_n^k}{n^k} + 1 + \frac{n!}{n^n}$$

Or $\dfrac{A_n^n}{n^n} = \dfrac{n!}{n^n}$ et $\dfrac{A_n^0}{n^0} = 1$.

Donc $\boxed{E(N) = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_n^k}{n^k}}$

(d) X admet une espérance et $E(X) = \varphi(x) + \int_x^{+\infty} t f(t)\,dt$.

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = E(X)$ donc $E(X) = E(X) + \lim\limits_{x \to +\infty} \int_x^{+\infty} t f(t)\,dt$

Ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_x^{+\infty} t f(t)\,dt = 0$. D'après le théorème des gendarmes

$$\lim_{x \to +\infty} x P(X > x) = 0$$

et donc $\boxed{E(X) = \lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = \int_0^{+\infty} (1 - F(t))\,dt}$

Partie III

(1). F_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty ; 0[$.

$x \mapsto \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et $x \mapsto e^{-x}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

Donc F_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$

Ainsi $\boxed{F_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en } 0}$

. $\lim\limits_{x \to 0^>} 1 + \frac{x}{n} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0^>} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-x} = 1$

Donc $\lim\limits_{x \to 0^>} F_n(x) = \lim\limits_{x \to 0^<} F_n(x) = 0$.

Donc $\boxed{F_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^0 \text{ sur } \mathbb{R}.}$

. $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} F_n(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 0 = 0}$ On cherche $\lim\limits_{x \to +\infty} F_n(x)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ $\to$ Forme indéterminée.

On a $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-x} = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \times \frac{1}{x^n} \times x^n e^{-x}$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \times \frac{1}{x^n} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{1}{n}\right)^n$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^n e^{-x} = 0$ (croissance comparée)

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-x} = 0$

Ainsi $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} F_n(x) = 1}$

(3) $\int_0^A (1-F_n(t))\,dt = \int_0^A \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-x}\,dx$

En utilisant le binôme de Newton $= \int_0^A \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left(\frac{x}{n}\right)^k e^{-x}\,dx$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{1}{n^k} \int_0^A x^k e^{-x}\,dx$$

Or $\lim_{A\to+\infty} \int_0^A x^k e^{-x}\,dx$ convergerge et vaut I_k.

Ainsi $\lim_{A\to+\infty} \int_0^A (1-F_n(t))\,dt = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{1}{n^k} I_k$

D'après la partie II,

$$E(T_n) = \int_0^{+\infty} (1-F_n(t))\,dt = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{I_k}{n^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k!}{n^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{k!}{n^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{A_n^k}{n^k} = E(N).$$

$$\boxed{E(T_n) = E(N)}$$

Partie IV.

(1) A l'aide de cette fonction on obtient

$$f(p,q) = \prod_{j=0}^{q-1} \left(1-\frac{j}{p}\right) = \prod_{j=0}^{q-1} \frac{(p-j)}{p^q} = \frac{1}{p^q} \times \prod_{j=0}^{q-1} (p-j)$$

$$\boxed{f(p,q) = \frac{A_p^q}{p^q}}$$

Car $A_p^q = \frac{p!}{(p-q)!} = p\times(p-1)\times\cdots\times(p-q+1)$

$$= \prod_{j=0}^{q-1} (p-j)$$